Les deux parties sont indépendantes

I

On pose :

$$J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\, dx ,$$

où n est un entier positif ou nul et x une variable réelle.

1° Étudier l'existence de J_n.

2° Calculer J_0 et J_1.

3° Montrer que $J_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\, dt$.

4° Établir une relation de récurrence entre J_n et J_{n-2}, $(n \geqslant 2)$.

5° Calculer J_n, $(n \geqslant 2)$.

6° Montrer que l'on a : $J_n < J_{n-1} < J_{n-2}$, $(n \geqslant 2)$.

a. En déduire que J_n est équivalent à J_{n-1} lorsque n tend vers l'infini.

b. A partir du produit $n\, J_n\, J_{n-1}$, montrer que J_n est équivalent à $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ lorsque n tend vers l'infini.

c. A partir de J_{2p}, montrer que l'on a :

$$\pi = \lim_{p \to +\infty} \frac{2^{4p}\, [p\,!]^4}{p\, [(2p)\,!]^2} .$$

7° Soit une variable aléatoire de densité de probabilité

$$\rho_p : z \longmapsto K_p \frac{1}{\left(1 + \frac{z^2}{p}\right)^{\frac{p+1}{2}}}, \quad (z \in \mathbf{R}),$$

où p est un entier supérieur ou égal à 1 et K_p une constante réelle (loi de Student à p degrés de liberté).

Exprimer K_p en fonction de p et de J_{p-1}.

8° Déterminer l'expression limite de $\rho_p(z)$ lorsque p augmente indéfiniment, à partir des équivalents à K_p et à $\left(1 + \frac{z^2}{p}\right)^{\frac{p+1}{2}}$.

II

On considère une suite chronologique d'épreuves : $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots \mathcal{E}_n, \ldots$ Chaque épreuve n'admet que deux résultats possibles, mutuellement incompatibles : les événements E_1 et E_2. On note a_n la probabilité de réalisation de E_1 à la n^{eme} épreuve et b_n la probabilité de réalisation de E_2 à la n^{eme} épreuve; on se donne a_1 et b_1. Pour décrire la dépendance entre les réalisations successives, on note p_{ij}, (i et $j \in \{1, 2\}$), la probabilité pour que E_i se réalise à une épreuve sachant que E_j s'est réalisé à l'épreuve précédente, et on suppose que p_{11} et p_{22} sont des constantes dans toute la suite d'épreuves; on se donne $p_{11} = \alpha$ et $p_{22} = \beta$.

1° Calculer p_{21} et p_{12}.

2° Soient les matrices :

$$M = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Déterminer les nombres réels λ_2 et μ_2 tels que : $M^2 = \lambda_2 M + \mu_2 I$.

En déduire l'expression de la matrice inverse de M, si elle existe.

3° Plus généralement montrer que : $M^p = \lambda_p M + \mu_p I$ (λ_p et $\mu_p \in \mathbf{R}$, p entier $\geqslant 2$). Écrire les relations de récurrence qui déterminent λ_p et μ_p. Quelle relation existe entre λ_p et μ_p ? Calculer λ_p et μ_p en fonction de $d = \alpha + \beta - 1$.

4° Calculer a_2 et b_2. Montrer que l'on peut représenter le passage du couple (a_1, b_1) au couple (a_2, b_2), et plus généralement au couple (a_n, b_n), par une opération de calcul matriciel.

5° Calculer a_n et b_n ; commenter le résultat $a_n + b_n$.

6° Quelle relation doivent satisfaire α et β pour que $M^2 = M$? Qu'implique cette relation pour la suite d'épreuves? Que faut-il de plus pour que la suite d'épreuves soit une suite de Bernoulli?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail